Wyznaczanie przyśpieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła matematycznego

M1

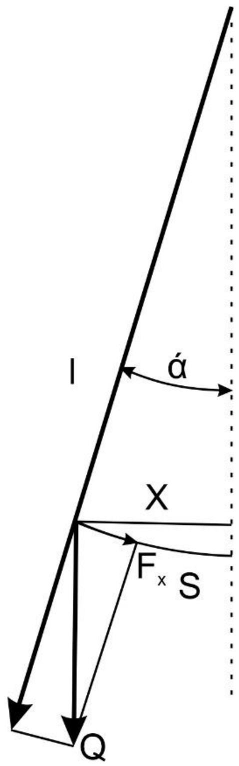
Przyrządy:

Wahadło matematyczne wraz z wyposażeniem, stoper.

Informacje:

Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny o masie m zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości *l* .Pokazane na rys.1 wahadło, po wychyleniu o kąt α, porusza się pod wpływem składowej siły ciężkości:

$$F_x = mg\sin\alpha$$



Rysunek 1

stycznej do łuku *s.* Dla małych wychyleń

(sin $\alpha\alpha$)

można przyjąć, że

$$\alpha = \frac{x}{l}$$

gdzie x jest wychyleniem z położenia równowagi.
Siłę F_x można wtedy przedstawić

$$F_x = -mg\frac{x}{l}$$

gdzie (–) uwzględnia fakt, że siła F_x jest skierowana przeciwnie do wychylenia *x*. Ruch wywołany przez tego rodzaju siłę proporcjonalną do wychylenia i przeciwnie skierowaną,

$$F = -kx$$

nazywamy ruchem harmonicznym prostym.

Z drugiej zasady dynamiki Newtona siła

$$F = ma$$

Wiedząc, że prędkość

$$v = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}; \quad a = \frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2}$$

możemy zapisać

$$m\frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2} = -\mathrm{kx}$$

Równanie ruchu harmonicznego prostego przyjmuje postać:

$$\frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$x = A\cos)$$

gdzie A – amplituda czyli maksymalne wychylenie.

Wiedząc, że prędkość

$$v = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -A\omega.\sin(\omega.t + \phi)$$

przyspieszenie

$$a = \frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2} = -A\omega^2\cos(\omega.t + \phi) = -\omega^2 x$$

Siła

$$F = \mathrm{ma} = -\mathrm{mA}\omega^2\cos(\omega.t + \phi) = -m\omega^2 x$$

Porównując siły powodujące ruch harmoniczny prosty

$$F_x = -P\mathrm{sin}\alpha = -\mathrm{mgsin}\alpha = -\mathrm{mg}\frac{x}{l}$$

z siłą

$$F = -m\omega^2 x$$

otrzymujemy

$$\omega^2 x = g\frac{x}{l}$$

gdzie

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

czyli

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$

stąd

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Znając okres wahań T dla małych wychyleń i długość wahadła *l* można wykorzystać ten wzór do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego *g*. Można również posłużyć się metodą Bessela tzn. zmierzyć okres wahań T_1 wahadła o długości *l* oraz okres T_2 wahadła skróconego o daną długość *d*. Uzyskuje się wtedy zależności

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l-d}{g}}$$

oba wyrażenia zostają podniesione do kwadratu a następnie odjęte. W rezultacie otrzymujemy wzór:

$$g = 4\pi^2 \frac{d}{T_1^2 - T_2^2}$$

Kolejność wykonywanych czynności:

1. Wprowadzić wahadło o długości l w drgania poprzez wychylenie go z położenia równowagi maksymalnie o kąt $\alpha \approx 6^0$. Zmierzyć czas trwania 50 okresów $50T_0$ (jeden okres to ruch w dwie strony – do maksymalnego wychylenia i z powrotem).
2. Skrócić nić wahadła poprzez uchwycenie i tym samym zablokowanie części nici przy pomocy ruchomego – przesuwnego w górę i w dół czerwonego zacisku (tzw. „krokodylek”) o około 1/4 jej długości. Zacisk ten jest umieszczony na dodatkowym, poziomym pręcie wahadła przymocowanym do pręta pionowego. Po przekręceniu w lewo dźwigni umieszczonej na elemencie łączącym pręt poziomy z „krokodylkiem” i pręt pionowy zacisk ten może być przesuwany w górę i w dół. Po ustawieniu zacisku w wybranej pozycji obrót dźwigni w prawo blokuje ruch pręta z „krokodylkiem”. **UWAGA: Środek kulki powinien zawsze pokrywać się z wartością „1000 mm” na linijce przyrządu**.
3. Ponownie zmierzyć czas trwania 50 okresów $50T_1$.
4. Odczytać wartość odległości *d* o jaką skrócono nić wahadła (odległość pomiędzy górnym końcem linijki, a miejscem w którym nić została zablokowana przez nas zaciskiem).
5. Powtórzyć pomiary z punktów 2-3 dla trzech innych dowolnych położeń zacisku na nici wahadła.
6. Wyniki pomiarów przedstawić w tabeli.

Tabela 1

Nr pomiaru	0	1	2	3	4
d [m]					
50T [s]					
T [s]					

7. Wykonać obliczenia przyspieszenia g przy pomocy wzoru

$$g = 4\pi^2 \frac{d}{T_1^2 - T_2^2}$$

   (dla wszystkich skróceń).
8. Obliczyć średnią wartość g.
9. Obliczyć błąd Δg stosując metodę Studenta – Fishera do wyników g z założonym poziomem ufności α=0,95.

<u>Wymagania:</u>

– równanie różniczkowe ruchu harmonicznego i jego rozwiązanie [1, 2, 4, 5, 9]
– wykres funkcji x = f(t) dla ruchu harmonicznego [2, 4, 5, 9]
– zależność przyspieszenia g od wysokości i szerokości geograficznej – wyprowadzenie odpowiednich wzorów [5, 9]