



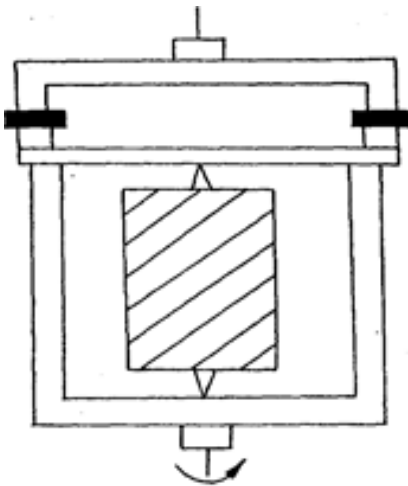
# Badanie elipsoidy bezwładności bryły sztywnej przy pomocy wahadła skrętnego

**M10**

## Przyrządy:

Wahadło skrętne z wyposażeniem, linijka.

## Informacje:



Bryła sztywna umocowana w ramce zawieszonyj na stalowym drucie (patrz rys. 1) może wykonywać drgania skrętne.

Równanie ruchu ma postać

$$(I_D + I) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D\varphi \quad (1)$$

gdzie  $I_D$  - moment bezwładności ramki

$I$  - moment bezwładności bryły względem danej osi

$\varphi$  - kąt obrotu

$D$  - moment kierujący

**Rysunek 1**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_D + I}{D}} \quad (2)$$

Bryłę o kształcie prostopadłościanu można wprowadzić w drgania skrętne względem różnych osi przechodzących przez środek masy, co zaznaczono na rysunku 2.

Odpowiednie okresy drgań będą wynosić:

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_{XD}}{D}} \quad \text{dla osi X}$$

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_{YD}}{D}} \quad \text{dla osi Y}$$

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_{ZD}}{D}} \quad \text{dla osi Z}$$

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_A}{D}} \quad \text{dla osi AC'}$$

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_P}{D}} \quad \text{dla osi PP'}$$

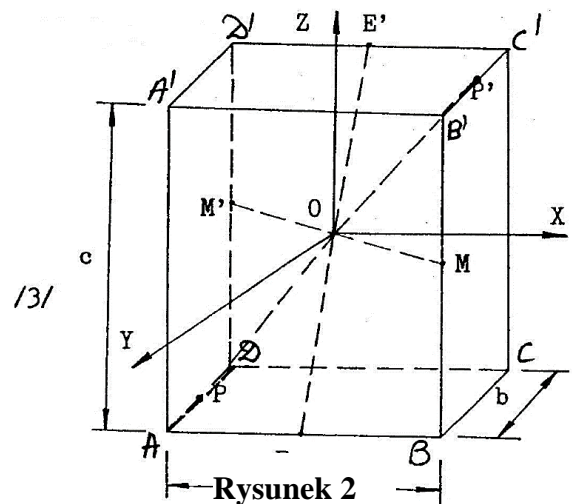
$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_E}{D}} \quad \text{dla osi EE'}$$

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_E}{D}} \quad \text{dla osi EE'}$$

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_M}{D}} \quad \text{dla osi MM'}$$

Moment bezwładności bryły względem osi obrotu tworzącej kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , z osiami X, Y, Z układu odniesienia pokrywających się z tzw. osiami głównymi momentu bezwładności, wynosi

$$I = I_{XO} \cdot \cos^2 \alpha + I_{YO} \cdot \cos^2 \beta + I_{ZO} \cdot \cos^2 \gamma \quad (4)$$



Wyrażając cosinusy kierunkowe poszczególnych osi poprzez długości krawędzi prostopadłościanu (a, b, c) można z równań (3) i (4) uzyskać następujące związki pomiędzy okresami

$$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot T_A^2 = a^2 T_X^2 + b^2 T_Y^2 + c^2 T_Z^2 \quad (5)$$

$$(b^2 + c^2) \cdot T_E^2 = b^2 T_Y^2 + c^2 T_Z^2$$

$$(a^2 + c^2) \cdot T_P^2 = a^2 T_X^2 + c^2 T_Z^2$$

$$(a^2 + b^2) \cdot T_M^2 = a^2 T_X^2 + b^2 T_Y^2$$

Elipsoidę bezwładności można skonstruować odkładając w kierunkach osi obrotu odcinki o długości  $a_i = 1/I_i$  gdzie  $I_i$  , jest momentem bezwładności bryły względem tej osi. Końce odcinków  $a_i$  dla wszystkich możliwych osi obrotu tworzą elipsoidę. W warunkach ćwiczenia odpowiednie momenty bezwładności można wyrazić przez kwadraty okresów i skonstruować elipsoidę posługując się odcinkami.

$$R_i = \frac{1}{\sqrt{T_i^2 - T_D^2}} \quad (6)$$

gdzie  $T_D$  jest okresem pustej ramki a  $T_i$ , okresem ramki z bryłą względem określonej osi obrotu.

### **Kolejność wykonywanych czynności:**

1. Umieścić w ramce badaną bryłę i znaleźć amplitudę roboczą. W tym celu ustawić elektromagnes w wybranym położeniu  $\varphi_1$ . Wzbudzić drgania skrętne i zmierzyć 10 okresów drgań  $T_1$ . Następnie zmniejszyć amplitudę drgań o połowę i zmierzyć 10 okresów drgań  $T_2$ . Jeżeli  $T_1 = T_2$ , to dowolny kąt z przedziału  $(1/2 \varphi_1; \varphi_2)$  może być amplitudą roboczą. Jeżeli  $T_1 \neq T_2$ , to zmniejszyć początkową wartość  $\varphi_1$  i ponownie zbadać czy  $T_1 = T_2$ . Wartość  $\varphi_1$  należy zmniejszać do takiej wartości, dla której powyższa zależność zachodzi.
2. W celu wyznaczenia okresów drgań skrętnych  $T_i$  ( $i = X, Y, Z, A, P, E, M$ ) względem poszczególnych osi, zmierzyć czas trwania  $t_i$  dziesięciu drgań powtarzając pomiar nie mniej niż 3 razy dla każdej osi.

Wyznaczyć podobnie okres drgań pustej ramki  $T_0$ . Linijką zmierzyć parametry geometryczne bryły.

**Tabela 1**

Bryła o wymiarach: ..... ; ..... ; .....								
Lp.	$t_x$	$t_y$	$t_z$	$t_A$	$t_P$	$t_E$	$t_M$	$t_0$
1								
2								
3								
$t_{\text{śr}}$								
$T_{\text{śr}}$								

3. Sprawdzić słuszność związków (5) w granicach określonych przez niepewności pomiarowe.
4. Narysować elipsoidę bezwładności badanego prostopadłościanu rysując przekroje elipsoidy w płaszczyznach OXY, OXZ i OYZ. Dla każdego przekroju powinno być 8 punktów.
5. Zbadać elipsoidę bezwładności drugiej bryły wykonując dla niej pomiary jak w punktach 1 - 4.

**Wymagania:**

- moment bezwładności bryły sztywnej [2, 9, 12]
- elipsoida bezwładności [9, 12]
- drgania skrętne, równanie ruchu drgań skrętnych [5, 12, 18]
- wyprowadzanie wzorów wykorzystanych w ćwiczeniu [5, 9]