Tablica Galtona Mechaniczny model rozkładu Gaussa

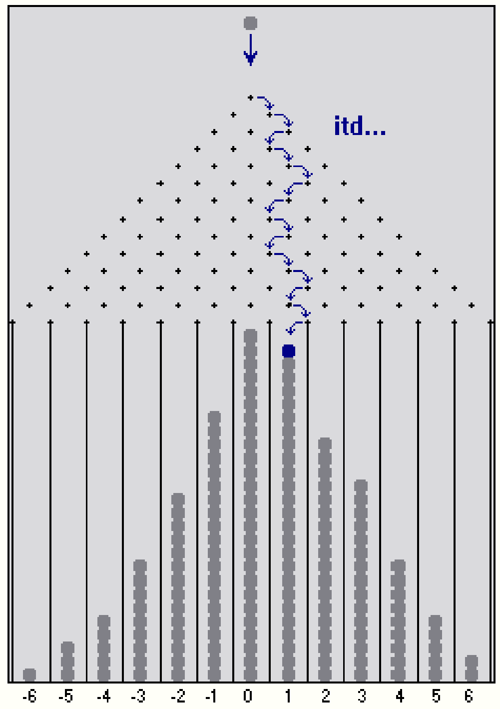
M9

Przyrządy:

Tablica Galtona, poziomica, 300 kulek plastikowych.

Cel ćwiczenia:

Wyznaczenie parametrów rozkładu normalnego oraz porównanie histogramu uzyskanego przy pomocy deski Galtona z krzywą Gaussa.



Tablicę Galtona stanowi ustawiona pod kątem 45° deska z rzędami pręcików metalowych rozmieszczonych w regularnych odstępach, w poziomych rzędach. Każdy rząd jest przesunięty względem poprzedniego o połowę odległości pomiędzy dwoma prętami. Nad prętami znajduje się pionowa szczelina, przez którą wrzucane są kulki. W dolnej części tablicy jest system jednakowych kanalików zaopatrzonych w wysuwane dno. Po niemal centralnym i sprężystym zderzeniu z pręcikami kulki wpadają do jednego z kanalików umieszczonych u dołu tablicy. Schemat tablicy Galtona przedstawia rysunek 1.

Rysunek 1

Schemat ideowy deski Galtona

Tablica symetryczna $p = q = 1/2$.

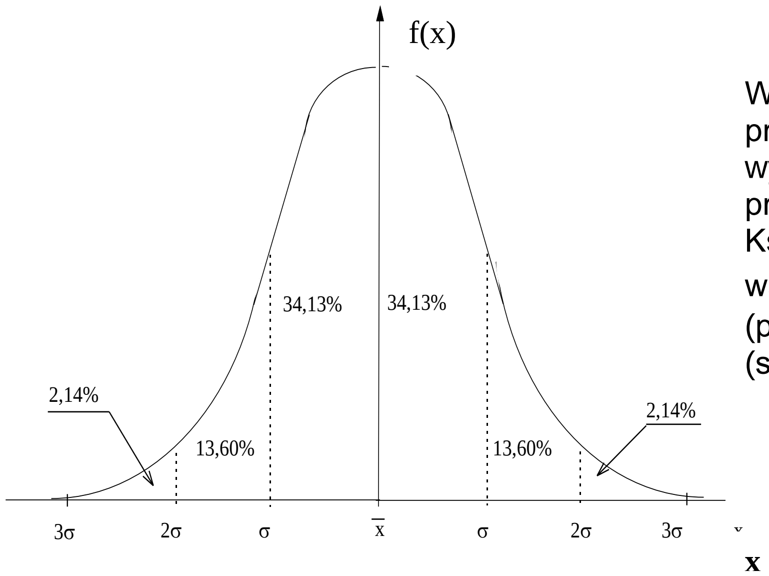
Proces błądzenia kulki przez rzędy prętów odpowiada pojedynczemu pomiarowi. Pomiar określonej wielkości jest zaburzony przez n losowych efektów zachodzących z prawdopodobieństwem p = 0.5, zarówno w kierunku zmniejszającym, jak i zwiększającym wartość mierzonej wielkości. Każde zderzenie z prętem markuje niepewność elementarną, a ostateczna pozycja kulki w jednym z kanalików odpowiada wynikowi pomiaru.

Odchylenia kulki w wyniku zderzenia z prętem w lewo lub prawo są jednakowo prawdopodobne:
p – prawdopodobieństwo odchylenia kulki w prawo,
q = 1 – p – prawdopodobieństwo odchylenia kulki w lewo.

Zatem największa jest możliwość trafienia kulki do kanalika środkowego położonego pod szczeliną wlotową. Prawdopodobieństwo trafienia kulki do któregoś z kanalików opisuje rozkład dwumianowy, który dla dużej liczby czynników rozpraszających dąży do rozkładu normalnego opisanego funkcją Gaussa.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (1)$$

f(x) - funkcja gęstości prawdopodobieństwa
x - zmienna losowa (wartość mierzona)
$\bar{x}$ - wartość oczekiwana (wartość średnia)
σ - odchylenie standardowe



Wartości liczbowe to procentowe prawdopodobieństwa pojawienia się wyniku pomiaru w wyznaczonych przedziałach.
Kształt rozkładu określony jest przez wartości dwóch parametrów: $\bar{x}$ (położenie maksimum krzywej) i σ (szerokość rozkładu)

Rysunek 2
Krzywa Gaussa rozkładu normalnego.

Deska Galtona jest mechanicznym modelem powstawania niepewności pomiarowej jako wyniku działania wielu niezależnych zakłóceń. Jeśli pomiar jest zakłócony przez niezależne czynniki np. warstwy pręcików, z których każdy wprowadza zaburzenie rzędu odchylenia standardowego, wówczas końcowa niepewność pomiarowa jest sumą kolejnych zakłóceń. W ten sposób można modelować jednowymiarowy proces błądzenia przypadkowego (jednowymiarowy gdyż rozważane są tylko poziome odchylenia kulki).

Wykonanie eksperymentu polega na wrzuceniu pojedynczo 300 kulek do szczeliny wlotowej i policzeniu kulek w każdym z 23 kanalików. Powtórzenie pomiaru polega na ponownym wrzuceniu kolejno 300 kulek. W ten sposób otrzymuje się histogram, w którym rolę przedziałów o jednakowych szerokościach spełniają kanaliki a poszczególnym numerom przedziałów odpowiadają ilości kulek w każdym przedziale.

Korzystając z wzoru Simpsona (2) można obliczyć łączne ilości kulek, jakie winny się znaleźć w kolejnych przedziałach histogramu:

$$n_{iS} = \frac{1}{4}(n_{i-1} + 2n_i + n_{i+1}) \qquad (2)$$

gdzie:

$n_i = \sum_{k=1}^{10} n_{ik}$ – całkowita liczba kulek w i-tym przedziale po 10 rzutach,

n_{iS} – całkowita liczba kulek w i-tym przedziale po 10 rzutach obliczona na podstawie wzoru Simpsona

Przyjmując założenie, że wyniki pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu należy wyznaczyć parametry rozkładu, tj. wartość oczekiwaną (średnia arytmetyczna), oraz odchylenie standardowe. Wartość średniej arytmetycznej $\bar{x}$, w sensie statystycznym, odpowiada numerowi przedziału (kanalika), dla którego obserwuje się maksimum. Wartość odchylenia standardowego σ_x (a także przedziału ufności) również przekłada się na odpowiednią liczbę kanalików. Te parametry rozkładu należy wyznaczyć w oparciu o relacje (3) i zaokrąglić do najbliższej liczby całkowitej (2).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{23} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{23} n_i},$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{23} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (3)$$

x_i – numer przedziału (kanalika)

$n = 3000 = \sum_{i=1}^{23} n_i$ – całkowita liczba przypadków, czyli 10 rzutów razy 300 kulek

Kolejność wykonywania pomiarów:

1. Ustaw deskę Galtona w pozycji poziomej (sprawdzenie przy użyciu poziomicy).
2. Przelicz ilość kulek (300 sztuk).
3. Wrzucaj pojedynczo kulki do szczeliny wlotowej deski Galtona.
4. Policz ilość kulek w poszczególnych kanalikach u dołu tablicy.
5. Pomiar wykonaj 10-krotnie i wyniki zanotuj w tabeli I

i = 1,...,23, k = 1,...,10

Tabela 1

x_i	Liczba kulek n_{ik} w kolejnych próbach										$\sum_{k=1}^{10} n_{ik} = n_i$	n_{iS}
	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	n_{i4}	n_{i5}	n_{i6}	n_{i7}	n_{i8}	n_{i9}	n_{i10}		
1												
2												
....												

Opracowanie wyników pomiaru

1. Oblicz łączną liczbę kulek n_i w każdym kanaliku dla wszystkich prób.
2. Korzystając ze wzoru Simpsona oblicz łączne ilości kulek n_{iS} w przedziałach histogramu.
3. Wykonaj wykresy $n_i = f(x_i)$, oraz $n_{iS} = f(x_i)$.
4. Oblicz parametry rozkładu, tj. wartość oczekiwaną, oraz odchylenie standardowe.

5. Wyznacz przedziały ufności wraz z odpowiadająca im liczbą kanalików dla trzech poziomów ufności: 0.50, 0.68, 0.95 i wpisz odpowiednie wartości do tabeli II.

Tabela 2

Poziom ufności α	Współczynnik $t_{\alpha n}$	Przedział ufności dla wartości oczekiwanej μ $\bar{x} - t_{n\alpha}\sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + t_{n\alpha}\sigma_{\bar{x}}$	Ilość kanalików
0,50			
0,68			
0,95			

6. Zapisz wynik końcowy w postaci: $\bar{x} = wartość \pm \Delta x$ oraz wnioski końcowe.

<u>Wymagania</u>

- miary zmienności: średnie (arytmetyczna, ważona, geometryczna, harmoniczna), dominanta, mediana, wariancja, odchylenie przeciętne [3, 6]
- rozkład normalny Gaussa [1, 2]
- odchylenie standardowe i jego interpretacja geometryczna [4. 6]
- metoda Studenta-Fishera, poziom i przedział ufności [4]
- wzór Simpsona [5]

<u>Literatura</u>

1. H. Szydłowski, Teoria pomiarów, PWN Warszawa 1974.
2. R. Nowak, statystyka dla fizyków, PWN Warszawa 2002
3. W. Volk, statystyka dla inżynierów WNT, Warszawa 1973
4. J. Lech, Opracowanie wyników pomiarów w I pracowni fizycznej, Cz-wa 1997
5. T. Pang, Metody obliczeniowe w fizyce, PWN Warszawa 2000
6. J.L. Kacperski, I pracownia fizyczna, Łódź 1998